

# 拡張されたナラヤナ多項式の合成積について

On convolutions of extended Narayana polynomials

田川 裕之 \*

TAGAWA Hiroyuki  
(和歌山大学教育学部)

2020 年 10 月 16 日受理

ナラヤナ多項式は、カタラン数の拡張となる多項式である。本稿では、ナラヤナ多項式の拡張となる多項式の合成積の証明を目的とする。一般に、母関数のべき乗における係数として合成積は定義されるため、合成積の分析には母関数の利用が有効ではあるが、本稿では、二重和の等式、超幾何級数の等式等の計算を主体とした手法を用いる。

## 1 序

以下、 $\mathbb{C}$  を複素数全体の集合、 $\mathbb{Z}$  を整数全体の集合とする。まず、 $a \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$(a)_n = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1} (a+i) & \text{if } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{\prod_{i=0}^{-n-1} (a+n+i)} & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

とおき、 $r \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_{r-1} \in \mathbb{C}$  に対して

$${}_rF_{r-1} \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_{r-1} \end{matrix} ; z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k \prod_{i=1}^r (a_i)_k}{k! \prod_{i=1}^{r-1} (b_i)_k}$$

と定義する。 $(a)_n$  はポツホハマー記号、 ${}_rF_{r-1} \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_{r-1} \end{matrix} ; z \right)$  は超幾何級数と呼ばれている。特に、 $(a)_{-1} = \frac{1}{a-1}$  であり、 $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $(a)_n (a+n)_m = (a)_{m+n}$  が成り立っている。また、 $a \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  ( $n \geq 0$ ) に対して

$$\binom{a}{n} = \frac{(-1)^n (-a)_n}{n!}$$

とおく。なお、 $\binom{a}{0} = 1$  であり、 $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $m, n \geq 0$  の場合には

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} & \text{if } n \leq m, \\ 0 & \text{if } n > m \end{cases}$$

となるので、 $\binom{m}{n}$  は二項係数そのものである。

$0 \leq k < n \leq 0$  に対して

$$N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-1}{k}$$

とおき、さらに、 $n \geq 0$  に対して

$$N_0(z) = 1, \quad N_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} N_{n,k} z^k \quad (n \geq 1)$$

\*本研究の一部は、JSPS 科研費 JP16K05060 の助成を受けたものです。

と定義する.  $N_{n,k}$  はナラヤナ数 (Narayana number),  $N_n(z)$  はナラヤナ多項式 (Narayana polynomial) と呼ばれている. 例えば

$$N_0(z) = N_1(z) = 1, \quad N_2(z) = 1 + z, \quad N_3(z) = 1 + 3z + z^2, \quad N_4(z) = 1 + 6z + 6z^2 + z^3$$

であり, 超幾何級数を利用すると,  $N_n(z)$  は次のように表せる<sup>1</sup>.

$$N_n(z) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -n \\ 2 \end{matrix}; z \right).$$

ナラヤナ数  $N_{n,k}$  は,  $1, 2, \dots, n$  についての降下点が  $k$  個の 231-回避順列の個数であり,  $(0, 0)$  から  $(n, n)$  への谷の個数が  $k$  個のディック経路の個数とも一致することが知られている (詳細については, 例えば [1] 参照). また, ディック経路の総数はカタラン数であるので,  $N_n(1)$  はカタラン数  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  である. したがって,  $C_n$  を超幾何級数で表すと

$$C_n = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -n \\ 2 \end{matrix}; 1 \right) \quad (1)$$

であり, この等式は, Chu-Vandermonde identity

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, a \\ b \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(b-a)_n}{(b)_n}$$

からも容易に得られる. そこで, [2] で導入した  $n, s \geq 0, m \geq 1$  に対して定義される拡張されたカタラン数  $C_n(m, s)$ , i.e.

$$C_n(m, s) = \frac{(s+1)_{(m+1)n}}{n!(s+2)_{mn}}$$

を Chu-Vandermonde identity を利用して, (1) の拡張となるように超幾何級数で表すことを試みると

$$C_n(m, s) = \binom{n+s}{s} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ s+2 \end{matrix}; 1 \right) \quad (2)$$

と記述できることが容易にわかる. 特に,  $C_n(1, 0) = C_n$  である.

さて,  $r \geq 1, n \geq 0$ , 数列  $\{a_n\}$  に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r a_{i_k}$$

は  $\{a_n\}$  の ( $r$  次の) 合成積 (convolution) と呼ばれている. 言い換えると,  $F(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$  としたとき,  $F(x)^r$  の  $x^n$  の係数が合成積である. Narayana polynomial の合成積については, [3] に

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r N_{i_k}(z) = \sum_{k=0}^n \frac{r}{n+r} \binom{n-1}{k} \binom{n+r}{k+r} z^k \quad (3)$$

と記載されており, 右辺を超幾何級数で表すと  $\binom{n+r-1}{n} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -n \\ r+1 \end{matrix}; z \right)$  である. また,  $C_n(m, s)$  の合成積は, [2] において

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r C_{i_k}(m, s) = \frac{(r(s+1))_{(m+1)n}}{n!(r(s+1)+1)_{mn}} \quad (4)$$

となることが証明されている.

本稿では,  $N_n(z)$ ,  $C_n(m, s)$  の拡張となる多項式  $N_{n,m}(s; z)$  を

$$N_{n,m}(s; z) = \binom{n+s}{s} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ s+2 \end{matrix}; z \right)$$

と定義し,  $N_{n,m}(s; z)$  の合成積を表す等式であり, (3), (4) の拡張となる次の等式の証明を目的とする.

---

<sup>1</sup>  ${}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1, 0 \\ 2 \end{matrix}; z \right) = 1$  に注意

**Proposition 1.1.**  $r, m \geq 1, n, s \geq 0$  に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r N_{i_k, m}(s; z) = \binom{n+r(s+1)-1}{n} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ r(s+1)+1 \end{matrix}; z \right). \quad (5)$$

なお、合成積の証明には母関数の利用が一般的であると思われるが、本稿では、超幾何級数の等式、和の等式等を利用した証明を行う。そのため、計算はかなり複雑になるが、証明の鍵となる次節で紹介する二重和の等式については、今後の拡張、一般化等が期待できる。

以降、次節において、鍵となる二重和の等式及び関連した等式の証明を行い、最終節で Proposition 1.1 を証明する。

## 2 鍵となる等式

本節では、Proposition 1.1 の証明の鍵となる次の等式の証明を行う。

**Proposition 2.1.**  $m, n \geq 0, r \geq 1, a, b \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-m)_i (-n)_j (b+m)_j (a)_{i+j} (ra+1)_{ri+rj} (rb+n)_{ri+(r-1)j}}{i!j!(a+1)_j (b+1)_{i+j} (rb)_{ri+rj} (ra+1)_{ri+(r-1)j}} \\ &= \frac{(b-a+m+n)(b-a+1)_{m-1} (r(b-a))_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1} (rb)_n}. \end{aligned} \quad (6)$$

以下、 $m, n \geq 0, r \geq 1, a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$  に対して

$$P_{m,n}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-m)_i (-n)_j (a)_j (b)_{i+j} (c)_{ri+(r-1)j} (d)_{ri+rj} z^{i+j}}{i!j!(e)_j (f)_{i+j} (g)_{ri+(r-1)j} (h)_{ri+rj}}$$

とおく。特に、(6) の左辺は  $P_{m,n}(b+m, a, rb+n, ra+1, a+1, b+1, ra+1, rb, r; 1)$  である。(6) を  $m+n$  の帰納法で証明するための鍵となる  $P_{m,n}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; z)$  の関係式は次である。

**Lemma 2.2.**  $m, n, r \geq 1, a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} & P_{m,n}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; z) \\ &= P_{m-1,n}(a-1, b, c, d, e, f, g, h, r; z) \\ &\quad - \frac{bz(e+n)(c)_r (d)_r}{ef(g)_r (h)_r} P_{m-1,n}(a, b+1, c+r, d+r, e+1, f+1, g+r, h+r, r; z) \\ &\quad + \frac{bnz(c-g)(c)_{r-1} (d)_r}{ef(g)_r (h)_r} P_{m-1,n-1}(a, b+1, c+r-1, d+r, e+1, f+1, g+r, h+r, r; z). \end{aligned} \quad (7)$$

*Proof.* まず、(7) の両辺の定数項については、 $P_{m,n}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; z)$  の定数項が 1 であるため一致していることが容易にわかる。したがって、(7) を示すためには、両辺の  $z^k$  ( $1 \leq k \leq m+n$ ) の係数の一致を示せばよい。そこで、 $m, n \geq 0, r \geq 1, 0 \leq k \leq m+n$  に対して

$$\begin{aligned} & P_{m,n}^{(k)}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; x) \\ &= \frac{(a)_k (b)_k (c)_{(r-1)k} (d)_{rk}}{k!(e)_k (f)_k (g)_{(r-1)k} (h)_{rk}} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i (-k)_i (-m)_i (-n)_{k-i} (c+(r-1)k)_i (-e-k+1)_i x^i}{i!(-a-k+1)_i (g+(r-1)k)_i} \end{aligned}$$

とおく。このとき、直接の計算により、 $P_{m,n}^{(k)}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; 1)$  は、 $P_{m,n}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; z)$  の  $z^k$  の

係数であることが容易にわかる. また,  $m, n, r \geq 1, 1 \leq k \leq m+n$  に対して

$$\begin{aligned}
& P_{m,n}^{(k)}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; x) \\
&= P_{m-1,n}^{(k)}(a-1, b, c, d, e, f, g, h, r; x) \\
&\quad - \frac{bx(e+n)(c)_r(d)_r}{ef(g)_r(h)_r} P_{m-1,n}^{(k-1)}(a, b+1, c+r, d+r, e+1, f+1, g+r, h+r, r; x) \\
&\quad + \frac{bnx(c-g)(c)_{r-1}(d)_r}{ef(g)_r(h)_r} P_{m-1,n-1}^{(k-1)}(a, b+1, c+r-1, d+r, e+1, f+1, g+r, h+r, r; x) \\
&\quad + \frac{bn(x-1)(c)_{r-1}(d)_r}{ef(g)_{r-1}(h)_r} P_{m-1,n-1}^{(k-1)}(a, b+1, c+r-1, d+r, e+1, f+1, g+r-1, h+r, r; x) \quad (8)
\end{aligned}$$

も成立している. 実際, (8) の両辺の  $x^i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) の係数の一致については, 直接の計算及び

$$\begin{aligned}
& m(a-i+k-1)(c+i+(r-1)k-1)(e-i+k) + (a-1)(c+i+(r-1)k-1)(e-i+k)(i-m) \\
& - i(a-i+k-1)(c+i+(r-1)k-1)(e+n) + i(a-i+k-1)(c-g)(i-k+n) \\
& + i(a-i+k-1)(g+(r-1)k+i-1)(i-k+n) - (c+i+(r-1)k-1)(e+k-i)(i-k)(i-m) = 0
\end{aligned}$$

を利用することにより示せる. したがって, (8) において,  $x=1$  とした等式と  $P_{m,n}^{(k)}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; 1)$  は,  $P_{m,n}(a, b, c, d, e, f, g, h, r; z)$  の  $z^k$  の係数であることから, (7) の両辺の  $z^k$  ( $1 \leq k \leq m+n$ ) の係数も一致することが分かる. 以上により, (7) は成立する.  $\square$

**Proof of Proposition 2.1.** (6) の左辺を  $A_{m,n}(a, b, r)$  とおくと,  $A_{m,n}(a, b, r) = P_{m,n}(b+m, a, rb+n, ra+1, a+1, b+1, ra+1, rb, r; 1)$  であるので, (7) から  $m, n \geq 1$  に対して, 次の関係式が成立している.

$$\begin{aligned}
A_{m,n}(a, b, r) &= A_{m-1,n}(a, b, r) - \frac{ar(a+n+1)(rb+n)_r}{(a+1)(rb)_{r+1}} A_{m-1,n}(a+1, b+1, r) \\
&\quad + \frac{anr(r(b-a)+n-1)(rb+n)_{r-1}}{(a+1)(rb)_{r+1}} A_{m-1,n-1}(a+1, b+1, r). \quad (9)
\end{aligned}$$

(9) を利用して,  $m+n$  に関する帰納法で, (6) を証明する.  $m=0$  のとき, (6) は

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (ra)_{rj} (rb+n)_{(r-1)j}}{j! (rb+1)_{rj} (ra+1)_{(r-1)j}} = \frac{(b-a+n)(r(b-a)+1)_{n-1}}{(b+n)(rb+1)_{n-1}} \quad (10)$$

であり, この等式は, すでに [2] の Lemma 2.3 で証明した等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (a)_{(m+1)k} (b)_{mk}}{k! (a+1)_{mk} (b-n+1)_{(m+1)k}} = \frac{(b-a+mn)(a-b+1)_{n-1}}{(b+mn)(-b+1)_{n-1}} \quad (11)$$

において,  $(a, b, m)$  を  $(ra, rb+n, r-1)$  と置き換えて整理した等式であるので成立している. また,  $n=0$  のときには, (6) は

$$\sum_{i=0}^m \frac{(-m)_i (a)_i}{i! (b+1)_i} = \frac{(b-a+1)_m}{(b+1)_m} \quad (12)$$

であり, この等式は, Chu-Vandermonde identity そのものであるため成立している.  $m+n-1$  まで成立したと仮定する ( $m+n \geq 2$ ). このとき, (9) と帰納法の仮定, 及び

$$\begin{aligned}
& (a+1)(b-a+m+n-1)(b+m-1)(b+m+n) - a(a+n+1)(b-a+m+n-1)(b+m+n-1) \\
& + an(b-a+m+n-2)(b+m+n) = (a+1)(b-a+m-1)(b-a+m+n)(b+m+n-1)
\end{aligned}$$

を利用して, 直接計算することで, (6) が得られる.  $\square$

(7) を利用すると次も成立する.

**Corollary 2.3.**  $m, n \geq 0, r \geq 1, a, b, c \in \mathbb{C}$  に対して

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-m)_i (-n)_j (b+m)_j (a)_{i+j} (rb+n)_{ri+(r-1)j} (c)_{ri+rj}}{i! j! (a)_j (b+1)_{i+j} (rb)_{ri+rj} (c)_{ri+(r-1)j}} = \frac{(b-a+1)_m (rb-c+1)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1} (rb)_n}. \quad (13)$$

**Proof.** (13) の左辺を  $B_{m,n}(a, b, c, r)$  とおくと,  $B_{m,n}(a, b, c, r) = P_{m,n}(b+m, a, rb+n, c, a, b+1, c, rb, r; 1)$  であるので, (7) から  $m, n \geq 1$  に対して, 次の関係式が成立している.

$$\begin{aligned} B_{m,n}(a, b, c, r) &= B_{m-1,n}(a, b, c, r) - \frac{r(a+n)(rb+n)_r}{(rb)_{r+1}} B_{m-1,n}(a+1, b+1, c+r, r) \\ &\quad + \frac{nr(rb-c+n)(rb+n)_{r-1}}{(rb)_{r+1}} B_{m-1,n-1}(a+1, b+1, c+r, r). \end{aligned} \quad (14)$$

(14) を利用して,  $m+n$  に関する帰納法で, (13) を証明する.  $m=0$  のとき, (13) は

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (rb+n)_{(r-1)j} (c)_{rj}}{j! (rb+1)_{rj} (c)_{(r-1)j}} = \frac{b(rb-c+1)_n}{(b+n)(rb)_n} \quad (15)$$

であり, この等式は, [4] に掲載された等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (a)_{(m+1)k} (b)_{mk}}{k! (a)_{mk} (b-n+1)_{(m+1)k}} = -\frac{(a-b)_n}{(b+mn)(-b+1)_{n-1}} \quad (16)$$

において,  $(a, b, m)$  を  $(c, rb+n, r-1)$  と置き換えて整理した等式であるので, 成立している. また,  $n=0$  のときには, (13) は

$$\sum_{i=0}^m \frac{(-m)_i (a)_i}{i! (b+1)_i} = \frac{(b-a+1)_m}{(b+1)_m} \quad (17)$$

であり, この等式も Chu-Vandermonde identity そのものであるため成立している.  $m+n-1$  まで成立したと仮定する ( $m+n \geq 2$ ). このとき, (14) と帰納法の仮定, 及び

$$(b+m-1)(b+m+n) - (a+n)(b+m+n-1) + n(b+m+n) = (b+m+n-1)(b-a+m)$$

を利用して, 直接計算することで, (13) が得られる.  $\square$

特に, (6), (13) において,  $r=1$  とすると次が得られる.

**Corollary 2.4.**  $m, n \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$  に対して, 次が成立する.

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-m)_i (-n)_j (b+n)_i (b+m)_j (a)_{i+j} (a+1)_{i+j}}{i! j! (a+1)_i (a+1)_j (b)_{i+j} (b+1)_{i+j}} = \frac{(b-a+m+n)(b-a+1)_{m-1} (b-a)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1} (b)_n}. \quad (18)$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-m)_i (-n)_j (b+n)_i (b+m)_j (a)_{i+j} (c)_{i+j}}{i! j! (a)_j (c)_i (b)_{i+j} (b+1)_{i+j}} = \frac{(b-a+1)_m (b-c+1)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1} (b)_n}. \quad (19)$$

なお, (18), (19) を超幾何級数を利用して書き直すと

$$\sum_{i=0}^m \frac{(-m)_i (a)_i (b+n)_i}{i! (b)_i (b+1)_i} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, a+i, a+i+1, b+m \\ a+1, b+i, b+i+1 \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(b-a+m+n)(b-a+1)_{m-1} (b-a)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1} (b)_n}, \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^m \frac{(-m)_i (a)_i (b+n)_i}{i! (b)_i (b+1)_i} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, a+i, b+m, c+i \\ a, b+i, b+i+1 \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(b-a+1)_m (b-c+1)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1} (b)_n}. \quad (21)$$

### 3 Proposition 1.1 の証明

特に,  $s=0$  の場合の  $N_{m,n}(0; z)$  を  $N_{m,n}(z)$ , i.e.

$$N_{m,n}(z) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ 2 \end{matrix}; z \right),$$

で表すことにする. (5) を示すためには, 次が有効である.

**Lemma 3.1.**  $m, r \geq 1$  とする.

(i)  $n \geq 1$  に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 1}} \prod_{k=1}^r N_{i_k, m}(z) = \binom{n-1}{r-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+r, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z \right). \quad (22)$$

(ii)  $n \geq 0$  に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r N_{i_k, m}(z) = \binom{n+r-1}{r-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z \right). \quad (23)$$

*Proof.* (i)  $n < r$  のときには、両辺ともに 0 となり成立しているの、以下、 $n \geq r$  とする. まず, (22) の右辺を  $H_{n,m}^{(r)}(z)$ , i.e.

$$H_{n,m}^{(r)}(z) = \binom{n-1}{r-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+r, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z \right),$$

とおき,  $2 \leq r \leq n, m \geq 1, 1 \leq a \leq r-1$  に対して

$$\sum_{s=1}^{n-1} H_{s,m}^{(a)}(z) H_{n-s,m}^{(r-a)}(z) = H_{n,m}^{(r)}(z) \quad (24)$$

を証明する. そのためには,  $0 \leq k \leq n-r$  に対して, (24) の両辺の  $z^k$  の係数が一致することを示せばよい. 以下, (24) の左辺の  $z^k$  の係数を  $L(k)$  とおく. まず,  $H_{n,m}^{(r)}(z)$  の定義から

$$L(k) = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k \binom{s-1}{a-1} \binom{n-s-1}{-a+r-1} \frac{(a-s)_j (-ms)_j (-a-n+r+s)_{k-j} (m(s-n))_{k-j}}{j! (k-j)! (a+1)_j (-a+r+1)_{k-j}} \quad (25)$$

である. ここで,  $(a-s)_j (-a-n+r+s)_{k-j}$  が分子にかかっていることから,  $s$  を  $0 \leq s-a-j \leq n-r-k$  を満たす範囲に制限してもよいことに注意して,  $s$  を  $a+i+j$  と置き換えて, (25) の右辺を整理すると

$$\begin{aligned} L(k) &= \frac{(r-a)(r-a+k+1)_{-k+n-r-1} (r-n)_k (m(a-n))_k}{k! (n-r)!} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{n-k-r} \sum_{j=0}^k \frac{(k-n+r)_i (-k)_j (a-k-r)_j (a)_{i+j} (ma+1)_{m(i+j)} (m(a-n)+k)_{mi+(m-1)j}}{i! j! (a+1)_j (a-n+1)_{i+j} (ma+1)_{mi+(m-1)j} (m(a-n))_{mi+mj}} \end{aligned} \quad (26)$$

と書き換えることができる. (6) において,  $(b, m, n, r)$  を  $(a-n, n-k-r, k, m)$  と置き換えた等式を利用して, (26) を書き直すと

$$\begin{aligned} L(k) &= \frac{(r-a)(r-a+k+1)_{-k+n-r-1} (r-n)_k (m(a-n))_k}{k! (n-r)!} \times \frac{r(-n+1)_{-k+n-r-1} (-mn)_k}{(r-a)(a-n+1)_{-k+n-r-1} (m(a-n))_k} \\ &= \binom{n-1}{r-1} \frac{(-n+r)_k (-mn)_k}{k! (r+1)_k} = (24) \text{ の右辺の } z^k \text{ の係数} \end{aligned}$$

となるので, (24) が成立する. 次に, (24) を利用して,  $r$  に関する帰納法で (22) を証明する.  $r=1$  のときには, (22) の両辺ともに  $N_{n,m}(z)$  となり成立している.  $r-1$  まで成立したと仮定する ( $r \geq 2$ ). このとき, 帰納法の仮定と (24) を利用すると

$$\begin{aligned} (22) \text{ の左辺} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 1}} \prod_{k=1}^r N_{i_k, m}(z) = \sum_{i_1=1}^{n-1} N_{i_1, m}(z) \sum_{\substack{i_2+\dots+i_r=n-i_1 \\ i_2, \dots, i_r \geq 1}} \prod_{k=2}^r N_{i_k, m}(z) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n-1} H_{i_1, m}^{(1)}(z) H_{n-i_1, m}^{(r-1)}(z) = H_{n, m}^{(r)}(z) = (22) \text{ の右辺} \end{aligned}$$

となり成立する. (ii)  $n = 0$  のときには, (23) の両辺ともに 1 となり成立しているのて, 以下,  $n \geq 1$  とする.  
(23) の左辺を (22) を利用して書き直すと

$$\begin{aligned}
 (23) \text{ の左辺} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r N_{i_k, m}(z) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{r-i}=n \\ i_1, i_2, \dots, i_{r-i} \geq 1}} \prod_{k=1}^{r-i} N_{i_k, m}(z) \\
 &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \binom{n-1}{r-i-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+r-i, -mn \\ r-i+1 \end{matrix}; z \right) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{r(-n+1)_k (-mn)_k z^k}{k!(k+1)!} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-r+1)_{r-1-i} (-n+k+1)_{r-1-i}}{(r-1-i)!(k+2)_{r-1-i}}
 \end{aligned}$$

Chu-Vandermonde identity を利用して, 整理すると

$$= \binom{n+r-1}{r-1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z \right) = (23) \text{ の右辺}$$

となり成立する. □

以上の準備の下で Proposition 1.1 の証明を行う.

### Proof of Proposition 1.1.

(23) において,  $r$  を  $s+1$  と置き換えると

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{s+1}=n \\ i_1, i_2, \dots, i_{s+1} \geq 0}} \prod_{k=1}^{s+1} N_{i_k, m}(z) = \binom{n+s}{s} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ s+2 \end{matrix}; z \right) = N_{n, m}(s; z)$$

と記述できるので

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ の左辺} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r N_{i_k, m}(s; z) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n \\ i_1, i_2, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^r \left( \sum_{\substack{j_1^{(k)}+j_2^{(k)}+\dots+j_{s+1}^{(k)}=i_k \\ j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, \dots, j_{s+1}^{(k)} \geq 0}} \prod_{u=1}^{s+1} N_{j_u^{(k)}, m}(z) \right) \\
 &= \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{r(s+1)}=n \\ j_1, j_2, \dots, j_{r(s+1)} \geq 0}} \prod_{k=1}^{r(s+1)} N_{j_k, m}(z)
 \end{aligned}$$

再度, (23) から

$$= \binom{n+r(s+1)-1}{n} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+1, -mn \\ r(s+1)+1 \end{matrix}; z \right) = (5) \text{ の右辺}$$

が成り立つ. したがって, 本稿の目的である (5) の成立が証明された. □

## 参考文献

- [1] 石川雅雄, “二項係数の代数的側面”, 数学セミナー 2020 年 7 月号, 18-24.
- [2] 田川裕之, “拡張されたカタラン数の合成積について”, 和歌山大学教育学部紀要-自然科学-, 第 70 集 (2020), 11-15.
- [3] <https://math.stackexchange.com/questions/1997791/convolution-of-narayana-polynomials>
- [4] <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/03/01/05/0018/>